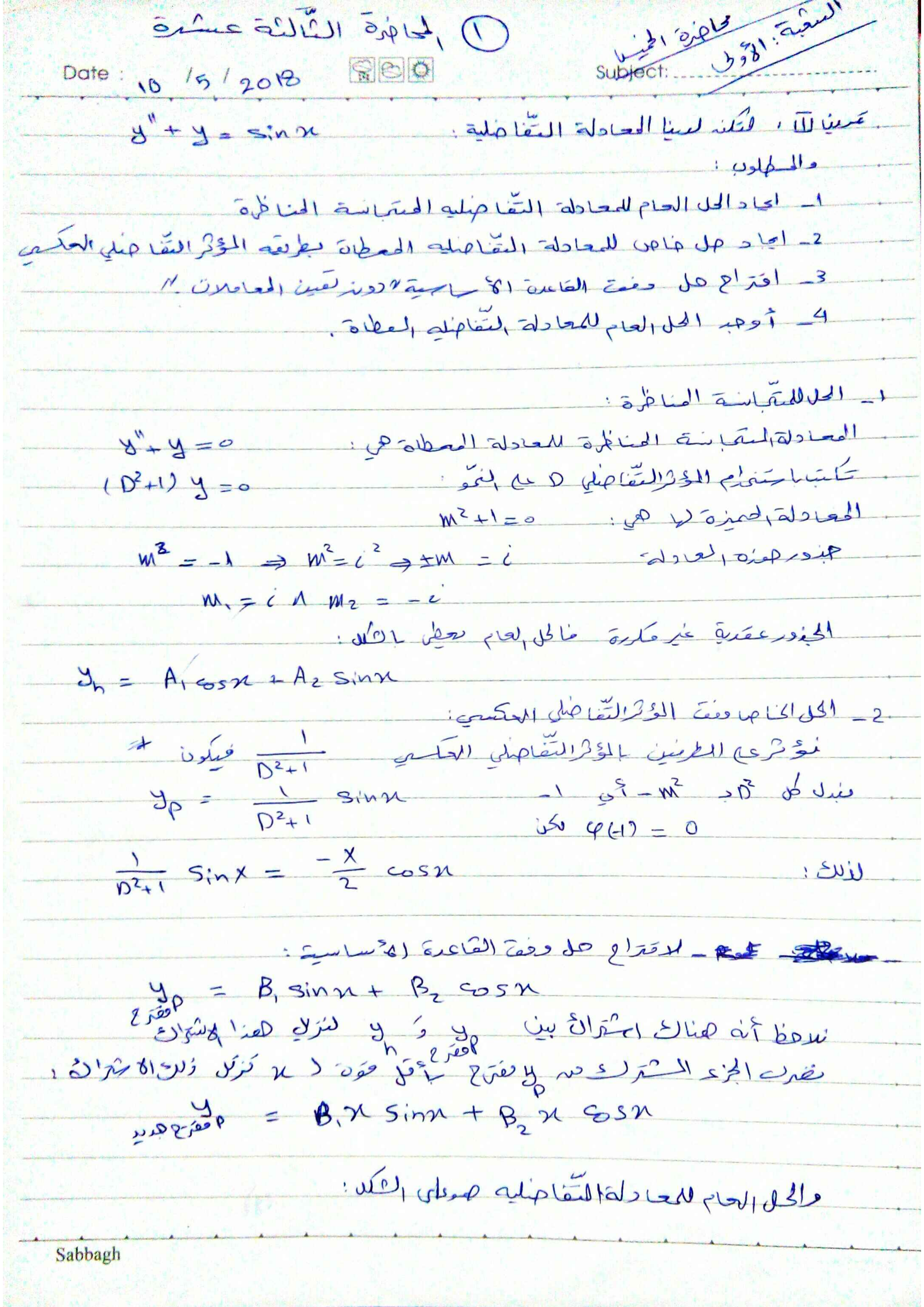


① المحاضرة الثالثة عشرة

الشعبة: الأولى
محاضرة الخميس

Date: 10 / 5 / 2018 Subject:

تمرين (١): لتكن لدينا المعادلة التفاضلية: $y'' + y = \sin x$

والمطلوب:

1- ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة

2- ايجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي

3- اقتراح حل وفق القاعدة الأساسية "دون تعيين المعاملات".

4- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

1- الحل المتجانسة المناظرة:

المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة المعطاة هي: $y'' + y = 0$

تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D على النحو: $(D^2+1)\,y = 0$

المعادلة المميزة لها هي: $m^2 + 1 = 0$

جذور هذه المعادلة: $m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = i^2 \Rightarrow \pm m = i$

$m_1 = i \wedge m_2 = -i$

الجذور عقدية غير مكررة فالحل العام يعطى بالشكل:

$y_h = A_1 \cos x + A_2 \sin x$

2- الحل الخاص وفق المؤثر التفاضلي العكسي:

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D^2+1}$ فيكون *

$y_p = \frac{1}{D^2+1} \sin x$

نبدل كل D^2 بـ $-m^2$ أي -1 لكن $\varphi(-1) = 0$

لذلك: $\frac{1}{D^2+1} \sin x = -\frac{x}{2} \cos x$

3- الاقتراح حل وفق القاعدة الأساسية:

$y_{p\,\text{مقترح}} = B_1 \sin x + B_2 \cos x$

نلاحظ أنه هناك اشتراك بين y_h و $y_{p\,\text{مقترح}}$ لنزيل هذا الاشتراك

نضرب الجزء المشترك من y_p المقترح بأقل قوة لـ x تزيل ذلك الاشتراك،

$y_{p\,\text{مقترح جديد}} = B_1 x \sin x + B_2 x \cos x$

والحل العام للمعادلة التفاضلية يعطى بالشكل:

$$y = y_h + y_p$$

$$= A_1 \cos x + A_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x.$$

ملاحظة: لو طلب منا تعيين الأمثال في الحل الخاص المقترح (وهذا مطلب محقق)

الحل:

- الحل الخاص المقترح الجديد ((أي بعد إزالة الاشتراك بينه وبين y_h إن وجد))

$$y_p = B_1 x \sin x + B_2 x \cos x$$

نشتق مرات بعدد رتبة المعادلة التفاضلية

أي لنوجد y_p' و y_p'':

$$y_p' = B_1 \sin x + B_1 x \cos x + B_2 \cos x - B_2 x \sin x$$

$$y_p'' = 2B_1 \cos x - 2B_2 \sin x - B_1 x \sin x - B_2 x \cos x$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة: $y'' + y = \sin x$

$$2B_1 \cos x - 2B_2 \sin x - B_1 x \sin x - B_2 x \cos x + B_1 x \sin x + B_2 x \cos x = \sin x$$

نختزل: $2B_1 \cos x - 2B_2 \sin x = 1 \sin x$

نطابق:

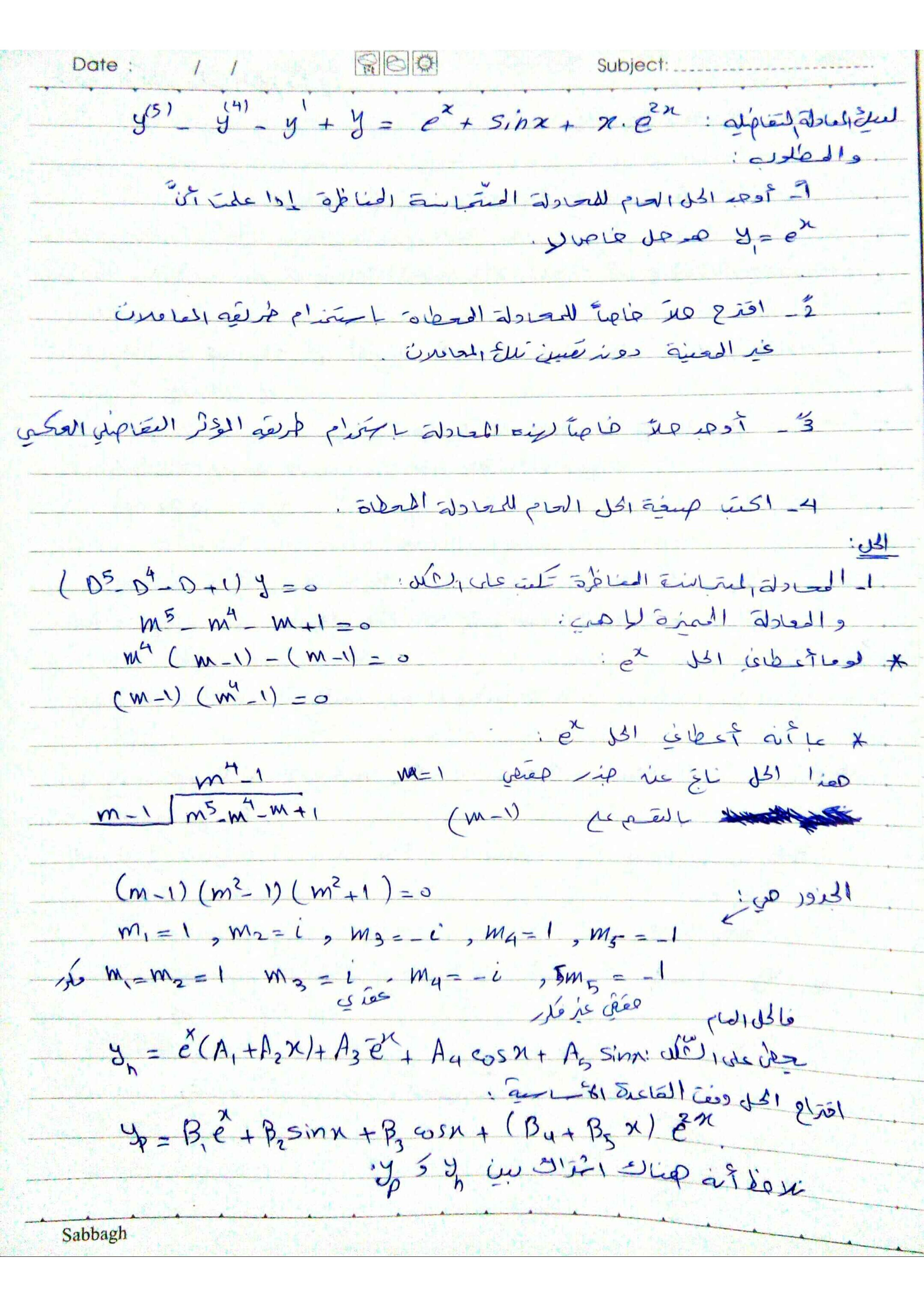
$$2B_1 = 0$$

$$-2B_2 = 1$$

$$\Rightarrow B_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{and} \quad B_1 = 0$$

مقترح $y_p = -\frac{1}{2} x \cdot \cos x$

وهو ما وجدناه بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي.



Date: / / Subject: ....

لتكن المعادلة التفاضلية: $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = e^{x} + \sin x + x \cdot e^{2x}$

والمطلوب:

1- أوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا علمت أن $y_1 = e^{x}$ هو حل خاص لها.

2- اقترح حلاً خاصاً للمعادلة المعطاة باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة دون تعيين تلك المعاملات.

3- أوجد حلاً خاصاً لهذه المعادلة باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي العكسي

4- اكتب صيغة الحل العام للمعادلة المعطاة.

الحل:

1- المعادلة المتجانسة المناظرة تكتب على الشكل: $(D^5 - D^4 - D + 1)y = 0$

والمعادلة المميزة لها هي: $m^5 - m^4 - m + 1 = 0$

* لو ما أعطاني الحل e^{x}:

$m^4(m-1) - (m-1) = 0$

$(m-1)(m^4-1) = 0$

* بما أنه أعطاني الحل e^{x}:

هذا الحل ناتج عن جذر حقيقي $m = 1$

بالقسمة على $(m-1)$

$$m^5 - m^4 - m + 1 \div (m-1) = m^4 - 1$$

الجذور هي:

$(m-1)(m^2-1)(m^2+1) = 0$

$m_1 = 1 , m_2 = i , m_3 = -i , m_4 = 1 , m_5 = -1$

$m_1 = m_2 = 1$ مكرر ، $m_3 = i$ ، $m_4 = -i$ عقدي ، $m_5 = -1$ حقيقي غير مكرر

فالحل العام يكون على الشكل:

$y_h = e^{x}(A_1 + A_2 x) + A_3 e^{-x} + A_4 \cos x + A_5 \sin x$

اقتراح الحل وفق القاعدة الأساسية:

$y_p = B_1 e^{x} + B_2 \sin x + B_3 \cos x + (B_4 + B_5 x) e^{2x}$

نلاحظ أنه هناك اشتراك بين y_h و y_p:

نضرب الجزء المشترك من y_p بأقل قوة لـ x كي نزيل هذا الاشتراك

فنضرب e^x بـ x^2 و $\cos x$ بـ x و $\sin x$ بـ x فيزول هذا الاشتراك

ويصبح y_p المقترح على الشكل:

$$y_p = \beta_1 x^2 e^x + \beta_2 x \cos x + \beta_3 x \sin x + (\beta_4 x + \beta_5) e^x$$

- لنوجد الحل الخاص وفق طريقة المؤثر التفاضلي العكسي:

$$y_p = \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1}\left(e^x + x\sin x + x \cdot e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} e^x + \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} x \sin x + \frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1} x \cdot e^{2x}$$

~~[illegible]~~

$(D-1)(D^2-1)(D^2+1) = (D-1)(D-1)(D+1)(D^2+1)$

$(D-1)^2(D+1)(D^2+1)$

1- تأثير المؤثر التفاضلي على الدالة e^x

$$\frac{1}{(D-1)^2(D+1)(D^2+1)} e^x = \frac{1}{2}\frac{1}{(D-1)^2(D+1)} e^x = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{(D-1)^2} e^x$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x^2}{2} e^x = \frac{1}{8} x^2 e^x$$

نلاحظ أن:

$\varphi(1) = 0$

$\varphi(D) = D^2 - 2D + 1 \Rightarrow \varphi'(D) = 2D - 2 \qquad \varphi'(1) = 0$

$\varphi''(D) = 2 \neq 0$

مؤثر تفاضلي بقوى لـ D مختلفة

$$\frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1}\sin x = \frac{1}{D(D^2)^2 - (D^2)^2 - D + 1}\sin x = \frac{1}{D}$$

ينعدم المقام D

إذن نقل هذه الحالة

نلجأ إلى الدالة الأسية:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

فدالة الـ $\sin$ هي الجزء التخيلي لـ (e^{ix})

$$\frac{1}{D^5 - D^4 - D + 1}\sin x = \operatorname{Im}\left[\frac{e^{ix}}{D^5 - D^4 - D + 1}\right]$$

نبدل كل D بـ (i):

$\varphi(i) = 0$

$\varphi' = 5D^4 - 4D^3 - 1 \quad , \quad \varphi'(1) = 4 + 4i.$

$$= Im\left(\frac{x e^{ix}}{4+4i}\right) = Im\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x e^{ix}}{1+i}\right)$$

نضرب بـ مرافق $(1+i)$ الذي هو $1-i$

نبدل كل i بـ $-i$

$$= Im\left(\frac{x}{4}\frac{(1-i)e^{ix}}{(1+i)(1-i)}\right) = Im\left[\frac{1}{8}(1-i)(x\cos x + i\sin x)\right]$$

نضرب عددين عقديين:

$$= Im\,\frac{1}{8}\left[(x\cos x + x\sin x) + i(\sin x - x\cos x)\right]$$

الحقيقي — التخيلي

إذن:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sin x = \frac{1}{8}x\sin x - \frac{1}{8}x\cos x$$

الموجد ناتج تأثير $\frac{1}{\varphi(D)}$ على الدالة xe^{2x}:

عندي طريقتان: إما الزحلقة الأسية

أو الجداء $x.V$ وهي الأسهل:

$$\frac{1}{(D^2+1)(D+1)(D-1)^2}xe^{2x} = x.\frac{1}{(D-1)^2(D+1)(D^2+1)}e^{2x} - \frac{5D^4-4D^3-1}{(D^5-D^4-D+1)^2}e^{2x}$$

$$= x.\frac{e^{2x}}{(2-1)^2(2+1)(4+1)} - \frac{5D^4-4D^3-1}{(32-16-2+1)^2}e^{2x}$$

$$= \frac{x}{15}e^{2x} - \frac{80-24-1}{(32-16-2+1)^2}e^{2x}$$

$$= \frac{x}{15}e^{2x} - \frac{55}{225}e^{2x}$$

فالحل الخاص وفق المؤثر التفاضلي العكسي:

$$y_p = \frac{1}{8}x^2e^x + \frac{1}{8}x\sin x - \frac{1}{8}x\cos x + \frac{x}{15}e^{2x} - \frac{55}{225}e^{2x}$$

الحل العام هو:

$$y = y_h + y_p = e^x(A_1 + A_2x) + A_3e^{-x} + A_4\cos x + A_5\sin x + \frac{1}{8}x^2e^x + \frac{1}{8}x\sin x - \frac{1}{8}x\cos x + \frac{x}{15}e^{2x} - \frac{55}{225}e^{2x}$$